

# Os fundamentos mecânicos do eletromagnetismo

(*The mechanical foundations of the electromagnetism*)

Penha Maria Cardozo Dias<sup>1</sup>, Rodrigo Fernandes Moraes

*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Recebido em 24/3/14; Aceito em 10/5/14; Publicado em 31/7/2014

James Clerk Maxwell elaborou uma teoria do Eletromagnetismo, a partir de propriedades dinâmicas de um fluido, o éter. Seguindo os cálculos de Maxwell, é possível identificar princípios, físicos e matemáticos, nos quais a teoria se apóia. A principal propriedade é a elasticidade rotacional do fluido, introduzida por James MacCullagh. Mas a teoria deixa problemas, entre os quais os mais impactantes são a natureza da corrente e o tratamento de condutores. Embora a teoria não seja mais aceita, ela estabeleceu categorias para a ciência do Eletromagnetismo. Um sub-produto do artigo é o detalhamento dos cálculos e argumentos de Maxwell.

**Palavras-chave:** James Clerk Maxwell, eletromagnetismo, um modelo mecânico do éter.

James Clerk Maxwell formulated a theory of Electromagnetism from dynamic properties of a fluid. According to these calculations, it is possible to identify principles, both physical and mathematical, on which the theory is based. The most important property is the rotational elasticity of the fluid, introduced by James MacCullagh. However the theory left loopholes, the most striking of which are the nature of the electric current and the treatment of conductors. Although we no longer accept the theory, it established categories of the Eletromagnetic science. A byproduct of this paper is the detailing of the calculations and arguments invoked by Maxwell.

**Keywords:** James Clerk Maxwell, electromagnetism, a mechanical model for the ether.

## 1. Introdução

James Clerk Maxwell desenvolveu uma teoria do Magnetismo e da Eletricidade a partir de propriedades de um meio — o éter — que preencheria o espaço. Maxwell apresenta a teoria do Eletromagnetismo em: *On Faraday's Lines of Force* (1856) [1], *On Physical Lines of Force* (1861) [2], *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1864) [3] e no livro *A Treatise on Electricity & Magnetism* (1873) [4]. O modelo do éter é apresentado em [2]; a motivação mais imediata de Maxwell para desenvolver tal teoria foi sua descrença na ação à distância [3, p. 527]:

Eu preferi procurar uma explicação do fato [de que corpos distantes interagem] [...] supondo que [as interações] são produzidas por ações que acontecem no meio em volta bem como nos corpos excitados [pela interação] e tentando explicar a ação entre corpos distantes sem assumir a existência de forças capazes de agir diretamente a distâncias sensíveis.

[...] A teoria que proponho pode ser chamada de uma teoria do *Campo Eletro-*

*magnético*, porque ela tem a ver com o espaço nas vizinhanças dos corpos elétricos ou magnéticos e pode ser chamada de *Teoria Dinâmica*, porque ela assume que nesse espaço há matéria em movimento, o que produz os fenômenos eletromagnéticos observados.

Muitos atribuem as motivações de Maxwell à construção de “analogias”; assim, ele procuraria uma analogia entre o Eletromagnetismo e movimentos de um fluido. Basicamente, a construção de analogias é uma declaração de princípios, epistemológica, que Maxwell fez sobre o conteúdo de verdade de sua teoria [1, p. 156]:

Para obter idéias físicas, sem adotar uma teoria física, nós nos devemos familiarizar com a existência de analogias físicas. Por analogia física, eu quero dizer aquela similaridade parcial entre as leis de uma ciência e aquelas de outra, que faz com que cada uma ilustre a outra.

O mesmo discurso é encontrado na Ref. [5] para justificar a analogia entre um gás perfeito e massas pontuais em colisão, e, daí, deduzir a distribuição de velocidades.

<sup>1</sup>E-mail: penha@if.ufrj.br.

des das moléculas em um gás perfeito, a hoje chamada “distribuição de Maxwell”. Por outro lado, é difícil evitar a sensação de que Maxwell parece envergonhar-se de formular uma teoria *ad hoc* e deixa claro para seu leitor de que sua teoria pode não ser baseada em princípios verdadeiros. De qualquer modo, as duas características — uma teoria microscópica baseada em Mecânica e o desapareço pela ação à distância — não eram idéias estranhas ao tempo de Maxwell. Edmund Whittaker (Ref. [6, p. 98-99]) cita que Leonhard Euler, como Maxwell depois, considerava o meio da propagação da luz o mesmo dos fenômenos elétricos; mais interessante é a natureza da gravitação como concebida por Euler; nas palavras de Whittaker [6, p. 98-99]:

[A eletrificação de um corpo] acontece, quando o éter contido em seus poros se torna mais ou menos elástico do que o que reside nos corpos adjacentes. Isso acontece, quando uma maior quantidade de éter é introduzida nos poros de um corpo ou quando parte do éter que ele contém é forçada para fora. Naquele caso, o éter se torna mais comprimido e, conseqüentemente, mais elástico; no outro caso, ele se torna rarefeito e perde sua elasticidade. Em ambos os casos, [o éter no corpo] não mais está em equilíbrio com aquele que é externo; e os esforços que [o éter] faz para recuperar seu equilíbrio produzem todos os fenômenos da eletricidade.

Não somente fenômenos elétricos, mas também gravitacionais, foram explicados em termos de um éter. A explicação dependia da suposição de que a pressão do éter cresce com a distância do centro da terra, seja, como  $[C - \frac{1}{r}]$  ( $C$  é uma constante)], de modo que a força que pressiona um corpo para a terra é mais forte do que a dirigida para longe dela, o balanço dessas forças sendo o peso do corpo.

Neste artigo, é apresentada uma análise da teoria de Maxwell. Seguindo os cálculos de Maxwell, é possível identificar princípios, físicos e matemáticos, nos quais ele baseia o Eletromagnetismo. O princípio físico básico é a propriedades de elasticidade rotacional do éter. A equação de Ampère e a equação de Faraday encontram justificativa dentro do modelo: Aquela é a própria elasticidade rotacional; essa é deduzida. Embora a teoria não mais seja aceita em sua forma original, ela mostrou os problemas de uma teoria do Eletromagnetismo, apontando onde buscar suas categorias; dentre os mais importantes problemas deixados pela teoria está o entendimento da natureza da corrente elétrica e da condutividade elétrica. A lição foi aprendida por uma

geração, os chamados maxwellianos.

Os cálculos são apresentados como Maxwell os fez, nas mesmas seqüências de passos (a menos que indicado); porém, a notação é modernizada. Detalhes dos cálculos são apresentados nos apêndices; no texto, indica-se os pontos chave dos argumentos que justificam o cálculo. Maxwell é sucinto e o baixo entendimento de seus cálculos tem levado a afirmativas equivocadas sobre Maxwell; um produto deste artigo é o detalhamento dos cálculos e dos argumentos invocados por Maxwell.<sup>2</sup>

## 2. O éter

Com o estabelecimento de que a luz é uma onda transversal, o que se deu na década de 1810-1820, um tema de pesquisa era a propriedade de um meio que respondesse por esse modo de propagação [6]; fundamentalmente, procurava-se um meio que fosse elástico e vibrasse transversalmente. A solução veio com *An Essay Towards a Dynamical Theory of Crystalline Reflexion and Refraction* (1839) [7]; nesse artigo, MacCullagh propôs que o meio tivesse a propriedade de elasticidade rotacional. Essa propriedade significa [6, p. 143], [7, p. 156]: Se  $\mathbf{e}$  é uma perturbação de um ponto do éter e  $\mu$  uma constante magnética (similar à constante da mola), então a energia potencial por unidade de volume, na situação em que o meio está em seu estado não perturbado, é dada por (em notação moderna)

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu |\nabla \times \mathbf{e}|^2;$$

em termos de coordenadas,

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu [\epsilon_{j\alpha\beta} (\partial_\alpha e_\beta) \epsilon_{jmn} (\partial_m e_n)] \equiv \frac{1}{2} \mu [\epsilon_{j\alpha\beta} \epsilon_{jmn} (\partial_\alpha e_\beta) (\partial_m e_n)].$$

Maxwell foi, inicialmente, influenciado pelas linhas de força, introduzidas por Michael Faraday. Em *Faraday's Lines* [1], ele imagina que essas linhas sejam linhas de fluxo de um fluido, formando tubos de escoamento. Essas linhas não se cruzam, significando que o número de linhas em um volume se conserva; então, o fluido é não compressível e obedece à equação da continuidade.

Maxwell não acreditava em ação à distância e, seguindo a idéia da similaridade de linha de força com o fluxo de um fluido, supôs que um meio pudesse responder, também, pelas forças magnética e elétrica. Esse fluido seria o mesmo éter de MacCullagh. É interessante que o mesmo meio respondesse por fenômenos até então distintos, mas a idéia não é tão original. Leonhard Euler já havia considerado que o éter da luz é a fonte de fenômenos elétricos. Talvez bons físicos não gostem de multiplicar entidades!

<sup>2</sup>As traduções de extratos dos textos originais foram feitas pelos autores.

### 3. Modelo mecânico do magnetismo e da eletricidade

#### 3.1. Modelo de éter com elasticidade rotacional

Maxwell propõe uma origem para o magnetismo [2, p. 455]:

Supomos que o fenômeno do magnetismo dependa da existência de tensões na direção das linhas de força, combinada com uma pressão hidrostática; ou, em outras palavras, uma pressão maior na região equatorial do que na direção axial. A próxima questão é: Que explicação mecânica podemos dar para essa desigualdade de pressão em um fluido ou meio em movimento? A explicação que mais prontamente ocorre à mente é que o excesso de pressão na direção equatorial surge da força centrífuga dos vórtices [...] no meio, tendo seus eixos na direção paralela à das linhas de força.

Os vórtices formam um fluido. Em qualquer parte do fluido [2, p. 455], esses vórtices giram em torno de eixos paralelos, no mesmo sentido, com velocidade angular constante; mas ao passar de uma parte para outra do campo, a direção dos eixos, a velocidade de rotação e a densidade podem ser diferentes. Forças centrífugas acarretam uma pressão [2, proposição II, p. 457], que dá origem à força magnética. A seguinte analogia está implicada em todo o artigo do Maxwell

Grandeza hidrodinâmica	Grandeza eletromagnética
velocidade do vórtice: $\mathbf{v}$	$\mathbf{H}$
vorticidade do fluido: $\nabla \times \mathbf{v}$	$4\pi\mathbf{j}$

onde  $\mathbf{j}$  é a corrente. A indução é definida por  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , onde  $\mu$  é uma grandeza magnética. A lei de Ampère está implícita na analogia e resulta da elasticidade rotacional, expressa pela vorticidade do fluido; em hidrodinâmica, vorticidade é definida por  $\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}$  [8]. A lei de Faraday vai ser demonstrada. O modelo ainda teria de definir a natureza da corrente ( $\mathbf{j}$ ), o campo elétrico induzido ( $\mathbf{E}$ ) e a natureza dos condutores; esses problemas tiveram impacto na história do eletromagnetismo [9].

#### 3.2. Origem da força magnética

O cálculo da pressão, feito por Maxwell, é apresentado no Apêndice 1. Modernizando a notação, as componentes do tensor de tensão (*stress tensor* [8]) são [2, fórmula (2), p. 457-458]

$$p_{ii} = \frac{1}{4\pi}\mu v_i v_i - p_0 \quad (\text{sem somar em } i),$$

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi}\mu v_i v_j = p_{ji},$$

onde  $v_i$  é a componente  $i$  da velocidade linear de rotação;  $\mu$  é uma constante relacionada a alguma propriedade magnética;  $p_0$  é uma pressão isotrópica. No valor da pressão, deveria aparecer a densidade e não, uma grandeza magnética; Maxwell substitui a densidade por  $\frac{1}{4\pi}\mu$  (Apêndice 1); o objetivo é escrever a lei de Ampère como  $4\pi\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$ .

Em hidrodinâmica [8], a densidade de força é a divergência do tensor pressão; para facilitar a notação, denominando  $\mathbf{p}_i = p_{ix}\hat{i} + p_{iy}\hat{j} + p_{iz}\hat{k}$ , a componente  $i$  da força magnética é

$$\mathcal{F}_i = \frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z} \equiv \nabla \cdot \mathbf{p}_i, \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_i = \partial_j p_{ij}.$$

Cálculo direto das derivadas fornece [2, p. 458, fórmula (5)]

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{4\pi} v_i \left\{ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu v_j) \right\} + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} v^2 - \frac{1}{4\pi} [\mu \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_{\text{componente } i}.$$

De acordo com a analogia entre o magnetismo e propriedades hidrodinâmicas, a densidade da força magnética é

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{8\pi} \mu \nabla H^2 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B}.$$

Para interpretar o primeiro termo, Maxwell define

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi m,$$

onde  $m$  é a densidade de matéria magnética; então [2, p. 460]:

...sob a hipótese de vórtices moleculares, nosso primeiro termo fornece uma explicação mecânica para a força agindo nos pólos norte ou sul de um campo magnético.

O segundo termo,  $\frac{1}{8\pi}\mu \nabla H^2$ , significa [2, p. 460-461]

Portanto, qualquer corpo colocado no campo será pressionado *em direção a corpos de intensidade magnética mais intensa* com uma força que depende, parcialmente, de sua própria capacidade para a indução magnética e, parcialmente, da taxa de crescimento do quadrado da intensidade.

A lei de Ampère é consequência da própria analogia, de forma que o terceiro termo é:  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ .

Em resumo, um corpo em um campo magnético sofre a força

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = m\mathbf{H} + \frac{1}{8\pi}\mu \nabla H^2 + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

### 3.3. Origem da indução elétrica

No modelo (Fig. 1), os vórtices giram no mesmo sentido. Ora, vórtices contíguos girariam em sentido contrário. Para girarem no mesmo sentido, Maxwell imaginou pequenas esferas entre os vórtices, as quais funcionam como “rodas livres” (*idle wheels*); elas transmitem o movimento de um vórtice para outro e constituem a matéria elétrica.

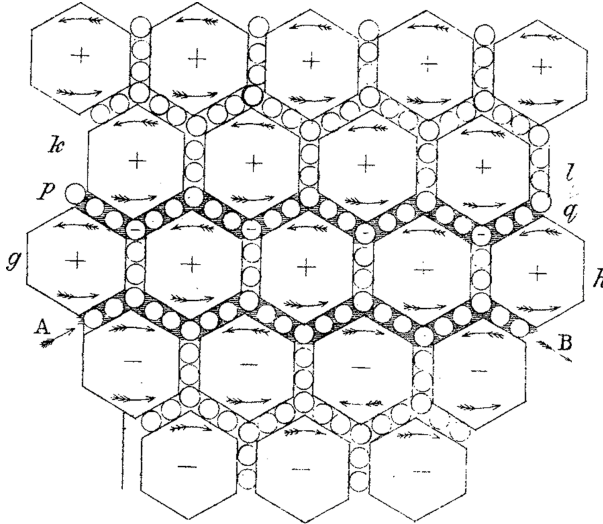


Figura 1 - As rodas livres [2, placa VIII, Fig. 2]. Os “hexágonos” acima e abaixo de  $A-B$  representam os vórtices de éter. As pequenas esferas são as “rodas livres”, colocadas entre os vórtices; elas formam a matéria da eletricidade.

Inicialmente, vórtices e esferas estão em repouso. Se houver um deslocamento das esferas, por exemplo, de  $A$  para  $B$  (da esquerda para a direita), significa que uma corrente começou. Esse movimento faz com que os vórtices  $g-h$ , acima de  $A-B$ , sejam colocados em movimento na direção oposta à do relógio (direção  $+$ ).

Se as outras esferas são livres para se mover, elas giram no sentido dos ponteiros do relógio (considerado  $-$ ) e, ao mesmo tempo, transladam da direita para a esquerda, em sentido oposto ao da corrente primária, formando uma corrente induzida [2, p. 477]. Se houver resistência (elétrica) do meio, o movimento das esferas causa a rotação dos vórtices  $k-l$  na direção  $+$ , como os vórtices  $g-h$ , até que os vórtices atinjam uma velocidade tal que o movimento das partículas se reduza, apenas, ao de rotação. O movimento das “rodas livres” não se dá de maneira instantânea e sim, sequencialmente [2, p. 477]:

Parece, pois, que os fenômenos da corrente induzida são parte do processo de comunicação da velocidade rotatória dos vórtices de uma parte do campo para outra.

Maxwell exemplifica a lei de Faraday na Fig. 2, abaixo. Na figura,  $B$  é um anel circular, sobre o qual é enrolado um fio. Se uma corrente passa no fio, um

ímã dentro do anel será afetado, mas nenhum efeito magnético ocorre em um ponto externo; assim, nenhum efeito aparece em um ímã externo. Mas, se um condutor,  $C$ , envolver o anel, como na figura, uma força eletromagnética atua no fio, quando a corrente variar e, se o circuito fechar, haverá uma corrente em  $C$  [2, p. 478]:

[Esse experimento mostra que] tudo que é preciso [para produzir força eletromotriz] é que as linhas de força passem através do circuito e que essas linhas de força variem em quantidade durante o experimento.

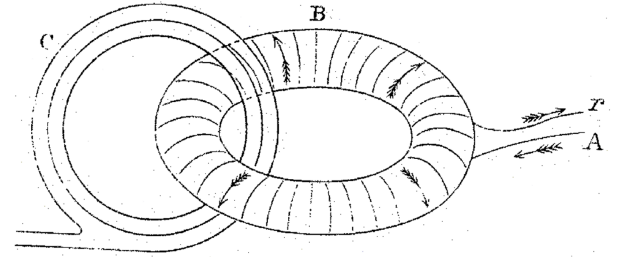


Figura 2 - Lei de Faraday. [2, placa VIII, Fig. 3]. A figura mostra um bobina por onde passa uma corrente ( $B$ ) e um circuito ( $C$ ), envolvendo a bobina.

### 3.4. A natureza mecânica da corrente elétrica

Uma partícula na superfície de um vórtice tem velocidade (linear) de rotação  $\mathbf{v}$ . A normal à superfície é  $\hat{n}$ ; então, a componente da velocidade, paralela à superfície é  $\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} \times \hat{n}$  ou  $v_{\parallel} = v \sin(\text{ângulo entre } \hat{v} \text{ e } \hat{n})$ . A velocidade de um ponto da superfície é, pois,  $u = v_{\parallel}$  ou [2, p. 469, fórmula sem número]

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \hat{n}.$$

Essa porção da superfície está em contato com outro vórtice. Uma camada de “rodas livres” entre os vórtices rola sem deslizar com uma velocidade, que é a média das velocidades dos vórtices que separam,  $\mathbf{u}_{\text{roda livre}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ , onde os índices 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2 [2, p. 469, fórmula (27)]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{roda livre}} &= \frac{1}{2} [\mathbf{v}_1 \times \hat{n}_1 + \mathbf{v}_2 \times \hat{n}_2] = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2] \times \hat{n} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} \times \hat{n}, \end{aligned}$$

pois as superfícies sendo contíguas, a normal a um vórtice aponta para o interior do outro e resulta  $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2 \equiv \hat{n}$ . Em componentes

$$u_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} \Delta v_{\alpha} n_{\beta}, \quad (1)$$

ou

$$u_x = \frac{1}{2} [n_z \Delta v_y - n_y \Delta v_z], \quad \text{etc.}$$

Maxwell, agora, define: Se  $j_x$  é o número de “rodas livres” atravessando a unidade de área na unidade de tempo na direção  $x$ , então o momentum transferido na direção  $x$ , pelas partículas no volume  $V$  é [2, p. 470, fórmula (28)]

$$j_x = \int u_x \sigma dS_x,$$

onde a integral é sobre todas as componentes  $x$  de partes da superfície separando dois vórtices e onde  $\sigma$  é o número de “rodas livres” por unidade de área. Maxwell não justifica como chegou a essa expressão, mas ela pode ser verificada por mera análise dimensional; hoje, esse é um cálculo padrão (Apêndice 2), que faz parte da formação de um físico. Após integração (Apêndice 2)

$$\frac{\text{quantidade de partículas}}{\text{unidade de área} \times \text{unidade de tempo}} \equiv \mathbf{j} = \frac{1}{2} \sigma \nabla \times \mathbf{v}$$

Maxwell substituiu  $\sigma$  por  $\frac{1}{2\pi}$ , de modo que a lei de Ampère seja válida; então

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{v}.$$

O  $\mathbf{j}$  calculado aqui é idêntico ao  $\mathbf{j}$  que aparece no terceiro termo de  $\mathcal{F}_{\text{mag}}$ . Interpretando [2, p. 471]

Parece, portanto, que [...] uma corrente elétrica é representada pela transferência de partículas móveis interpostas entre vórtices vizinhos [...]. Supõe-se que as partículas rolem sem deslizar entre os vórtices, [...] e não se tocam, de modo que enquanto permanecerem dentro de uma molécula, não há perda de energia por resistência. Entretanto, quando há uma transferência geral de partículas em uma direção, elas devem passar de uma molécula para outra e, ao fazê-lo, experimentam resistência, de modo a perder energia e gerar calor.

#### 4. A lei de Faraday

Como a indução está associada ao movimento das “rodas livres”, Maxwell estuda como esse movimento afeta o movimento dos vórtices. Quando as “rodas livres” variam sua energia, essa energia passa aos vórtices como energia cinética das partículas na superfície do vórtice. Então, Maxwell calcula a variação de energia do campo (dos vórtices) e das “rodas livres” e as iguala; como consequência, segue-se a lei de Faraday.

A energia do campo é cinética e, substituindo  $\rho$  por  $\frac{\mu}{4\pi}$ , a densidade de energia é [2, p. 475, fórmula (51)]

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \mu \sum_i v_i^2;$$

onde a escolha da constante vem da aplicação a um caso simples, não discutido neste artigo [2, p. 473, fórmula

(44)]; então, sendo  $V$  o volume, a energia é

$$U = \mathcal{U} V = \frac{1}{8\pi} \mu V \sum_i v_i^2.$$

A variação local da energia é [2, p. 475, fórmula (52)]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \mu \sum_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{4\pi} \mu \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (2)$$

A seguir, Maxwell calcula a potência transmitida pelas “rodas livres”. Seja  $\mathbf{F}_{\text{elec}}$  a força por unidade de “rodas livres” ou de matéria elétrica na superfície dos vórtices; equivale, pois, ao campo elétrico,  $\mathbf{E}$ . Como cada “roda livre” toca dois vórtices diferentes, nas extremidades de um diâmetro, a reação é igualmente dividida entre vórtices e é  $-\frac{1}{2} \mathbf{F}_{\text{elec}}$ . Maxwell faz a densidade superficial de “rodas livres” igual a  $\sigma = \frac{1}{2\pi}$ ; então a (densidade de) força transmitida a um vórtice é  $-\frac{1}{4\pi} \mathbf{F}_{\text{elec}}$  e a (densidade de) potência é [2, p. 474, fórmula (47)]

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{F}_{\text{elec}} \cdot \mathbf{u} dS.$$

Expansão em série de Taylor, onde os índices 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(P_0) + d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathcal{F}_i(P_0) = \mathcal{F}_i(P_0) + (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i,$$

junto com a expressão da velocidade, Eq. (1)

$$u_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta,$$

permitem achar (Apêndice 3)

$$\oint \mathbf{F}_{\text{elec}} \cdot \mathbf{u} dS = -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\alpha \mathcal{F}_i = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}}).$$

Então [2, p. 475, fórmula (50)]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} V. \quad (3)$$

Igualando as Eqs. (2) e (3), obtém-se [2, p. 475, fórmula (54)]

$$-\nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} = \mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (4)$$

ou, lembrando que  $\mathbf{F}_{\text{elec}}$  é a força por quantidade de “rodas livres” ou por unidade de matéria elétrica

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

#### 4.1. O estado eletrotônico e a lei de Faraday

Michael Faraday reconhece que a indução envolve um “novo estado elétrico ou condição da matéria”, ao qual deu o nome de “estado eletrotônico” [10, p. 273], em 1831:

60. Enquanto o fio está sujeito à indução, seja eletro-voltaica seja magneto-elétrica, parece estar em um estado peculiar. Pois resiste à formação de uma corrente nele, enquanto que tal corrente seria produzida, quando em sua condição comum; e, quando não influenciado, tem o poder de originar uma corrente, um poder que o fio não possui em circunstâncias comuns. Essa condição elétrica da matéria não foi reconhecida, até agora, mas ela provavelmente exerce uma influência muito importante em muitos, senão na maioria dos fenômenos produzidos por correntes de eletricidade. Por razões que aparecerão a seguir (71), após aconselhamento com amigos doutos, eu me aventurei a chamá-la de estado *eletrotônico*.

[...]

71. Esse peculiar estado parece ser um estado de tensão e pode ser considerado *equivalente* a uma corrente de eletricidade, pelo menos igual àquela produzida, seja quando a condição é induzida ou [seja quando] destruída. A corrente gerada, entretanto, no início ou no término, não é para ser considerada uma medida do grau de tensão que o estado eletrotônico atingiu.

Maxwell explora a idéia de Faraday de um “estado eletrotônico” [1, p. 166]:

Quando um condutor se move na vizinhança de uma corrente de eletricidade ou de um ímã ou quando uma corrente ou ímã próximos ao condutor se movem próximos ao condutor, ou alteram a intensidade, então uma força atua no condutor e produz tensão elétrica ou uma corrente contínua, conforme o circuito seja aberto ou fechado. Essa corrente é produzida somente por mudanças dos fenômenos elétrico ou magnético em volta do condutor e, na medida em que esses [fenômenos] permaneçam constante, não há efeito observado no condutor. Ainda assim, o condutor está em estados diferentes, tanto quando perto de uma corrente ou ímã como quando [for] afastado de sua influência, pois a remoção ou destruição da corrente ou do ímã ocasiona uma

corrente, a qual não existiria se o ímã ou a corrente não tivessem estado previamente em ação. Esse tipo de consideração levou o Professor Faraday a conectar sua descoberta da indução de correntes elétricas à concepção de um estado no qual todos os corpos são colocados pela presença de ímãs ou correntes. Esse estado não se manifesta por algum fenômeno, na medida em que ele permaneça imperturbável, mas qualquer mudança nesse estado é indicada por uma corrente ou tendência a uma corrente. A esse estado, ele deu o nome de “estado eletrotônico” e, embora ele tenha, posteriormente, tido sucesso em explicar o fenômeno que o sugeriu [ao estado eletrotônico] por meio de concepções menos hipotéticas, em várias ocasiões ele sugeriu a probabilidade de que algum fenômeno possa ser descoberto, o qual tornaria o estado eletrotônico o objeto de indução legítima.

Maxwell identifica o “estado eletrotônico”. Na ausência de “matéria magnética”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{A} \quad \text{ou} \\ \mu \mathbf{v} = -\nabla \times \mathbf{A}.$$

Derivando,

$$\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

ou, usando a lei de Faraday, na Eq. (4) acima

$$-\nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \\ \nabla \times \left[ \mathbf{F}_{\text{elec}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0.$$

A solução é

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi.$$

Inicialmente, porém, Maxwell escreve apenas

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

e só posteriormente, embora ainda no mesmo artigo, ele adiciona o gradiente.

É possível, agora, identificar o “estado eletrotônico” [2, p. 476]:

[...] eu apresentei razões para considerar as quantidades,  $[\mathcal{A}_x]$ ,  $[\mathcal{A}_y]$ ,  $[\mathcal{A}_z]$  como partes resolvidas [componentes] daquilo que Faraday conjecturou existir e chamou de *estado eletrotônico*.

#### 4.2. A força eletromotriz em um corpo em movimento

A variação de velocidade de um vórtice é devida à força eletromotriz, pela Lei de Faraday,  $\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}}$ . Porém, se — além de sua rotação em torno de um eixo, que responde pelos efeitos magnéticos — o vórtice tem um movimento, que causa uma deformação ou mudança de posição, a variação de velocidade deve ter um termo que responda por esses efeitos. Após longo cálculo (Apêndice 4), Maxwell demonstra que esse termo é [2, p. 481, fórmula (68)]

$$\delta \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{r},$$

ou, em termos de componentes,

$$\delta v_i = (v_\alpha \partial_\alpha) \delta x_i,$$

onde  $\delta x_j$  é variação do vórtice devida à deformação ou movimento. Então, se  $\mathbf{w} = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$  for a velocidade com que se dá a deformação

$$\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}.$$

Então [2, p. 481, fórmula (69)]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w}.$$

Por outro lado, a derivada convectiva, devida ao movimento  $\mathbf{w}$ , é [2, p. 481, fórmula (70)]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Igualando

$$-\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (5)$$

Agrupando termos

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

O leitor moderno reconhece a expressão do cálculo vetorial

$$\nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v};$$

no caso em que [2, p. 482, fórmula (72)]  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$  (ausência de matéria magnética) e em que [2, p. 481, fórmula (71)]  $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  (fluido incompressível), a expressão se torna

$$\nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Maxwell não invoca a expressão do cálculo vetorial; como trabalha diretamente com componentes, ele escreve (5) para a componente  $x$  e abre as derivadas,

usando a fórmula de derivação de um produto, juntamente com as condições de ausência de matéria magnética e incompressibilidade. O resultado é o mesmo [2, p. 482, fórmula (73)]

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}). \quad (6)$$

Essa expressão pode ser re-escrita usando potenciais, como feito por Maxwell [2, p. 482]. Usando que, na ausência de matéria magnética,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  [2, p. 482, fórmula (74)]

$$\mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{ou} \quad \mu \mathbf{v} = -\nabla \times \mathbf{A}.$$

Derivando [2, p. 482, fórmula (75)]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Colocando esse valor na Eq. (6)

$$\nabla \times \mathbf{F}_{\text{elec}} - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mu \mathbf{v}),$$

ou [2, p. 482, fórmula (76)]

$$\nabla \times \left[ \mathbf{F}_{\text{elec}} - \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{w} \times \mu \mathbf{v} \right) \right] = 0.$$

A solução é [2, p. 482, fórmula (77)]

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} - \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{w} \times \mu \mathbf{v} \right) = -\nabla \Phi,$$

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = \mathbf{w} \times \mu \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi,$$

ou, em termos de  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi.$$

A interpretação dessa expressão é a seguinte [2, p. 482]: O primeiro termo é o efeito devido ao movimento em um campo magnético; o segundo termo é a mudança no estado eletrotônico produzido por alterações da posição ou da intensidade de ímãs ou correntes no campo; o terceiro é a tensão elétrica no campo.

“Modernizando” a expressão, ela coincide com o que, hoje, se chama força de Lorentz em um corpo carregado em movimento (onde  $q$  é a carga do corpo), escrita no sistema CGS [11]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{estático}} + \frac{1}{q} \mathbf{w} \times \mathbf{B},$$

onde

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = q\mathbf{E}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi = q\mathbf{E}_{\text{estático}}.$$

## 5. A corrente de deslocamento

Maxwell assim descreve a diferença entre um condutor e um dielétrico [2, p. 490-491]):

Aqui temos duas qualidades independentes dos corpos, uma pela qual eles permitem a passagem de eletricidade através deles e outra, pela qual eles permitem que a ação elétrica seja transmitida através deles, mas sem permitir a passagem da eletricidade.

Um corpo condutor pode ser comparado a uma membrana porosa que opõe maior ou menor resistência à passagem de um fluido, enquanto um dielétrico é como uma membrana elástica que pode ser impermeável ao fluido, mas transmite a pressão do fluido em um lado ao [fluido] no outro.

Quando age em um condutor, a força motriz produz uma corrente que, ao encontrar resistência, ocasiona uma transformação intermitente de energia elétrica em calor, a qual é incapaz de ser armazenada, de novo, como energia elétrica por reversão do processo.

A força eletromotriz agindo em um dielétrico produz um estado de polarização de suas partes, similar em distribuição à polaridade de partículas de ferro sob a influência de um ímã e, como a polarização magnética, capaz de ser descrita como um estado no qual cada partícula tem seu pólo em condições opostas.

Em um dielétrico sob indução, pode-se conceber que a eletricidade em cada molécula esteja tão deslocada que um lado se torna positivamente elétrico e o outro, negativamente elétrico, [e conceber que] a eletricidade permaneça inteiramente conectada com a molécula e não passe de uma molécula para outra.

O efeito dessa ação na massa inteira do dielétrico é produzir um deslocamento geral da eletricidade em uma certa direção. Esse deslocamento não se torna uma corrente, pois, quando atinge certo valor, fica constante, mas é o começo de uma corrente e suas variações constituem correntes na direção positiva ou negativa, dependendo se o deslocamento cresce ou decresce.

De acordo com o texto de Maxwell, acima, existe uma corrente — a corrente de deslocamento — devida à intermitência do deslocamento,  $\lambda$ ; portanto, por definição

$$\mathbf{j}_{\text{deslocamento}} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

A definição de “deslocamento” é apresentada de forma mais sucinta na Ref. [3, p. 554]

Deslocamento elétrico consiste na eletrificação oposta dos lados de uma molécula ou partícula de um corpo que pode ou não ser acompanhada de transmissão através do corpo.

Por outro lado, a força eletromotriz por unidade de “rodas livres” é definida como proporcional ao deslocamento (talvez por ser elástica)

$$\mathbf{F}_{\text{elec}} = -4\pi\epsilon^2\lambda,$$

onde  $\epsilon$  é um coeficiente que depende da natureza do dielétrico. Então

$$\mathbf{j}_{\text{deslocamento}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{elec}}}{\partial t},$$

ou, como  $\mathbf{F}_{\text{elec}}$  é força por unidade de “rodas livres”:

$$\mathbf{j}_{\text{deslocamento}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

## 6. As equações do eletromagnetismo

Somente em 1864, em *A dynamical theory of the electromagnetic field* [3], Maxwell reúne esses resultados em um conjunto de equações para o eletromagnetismo. Nesse artigo, ele apresenta uma descrição macroscópica do eletromagnetismo, o que não significa que tenha abandonado suas idéias anteriores. As equações são [3, p. 534 e p. 562]

(A) Relação entre deslocamento elétrico, corrente real, e corrente total, composta por ambas

$$\begin{aligned} \text{corrente total: } \mathbf{J} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \\ \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{deslocamento}} &= \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{elec}}}{\partial t} \end{aligned}$$

(B) Relação entre as linhas de força magnética e os coeficientes de indução de um circuito

$$\text{força magnética: } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ ou } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{H}$$

(C) Relação entre a intensidade de uma corrente e seus efeitos magnéticos, de acordo com o sistema eletromagnético de medida

$$\text{corrente elétrica: } \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{deslocamento}}$$

(D) Valor da força eletromotriz em um corpo, a qual resulta do movimento do corpo no campo, da alteração do próprio campo e da variação do potencial de uma parte do campo a outra

$$\text{força electromotriz: } \mathbf{F}_{\text{elec}} = \mathbf{w} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$



(E) Relação entre o deslocamento elétrico e a força eletromotriz que o produz

$$\text{elasticidade elétrica: } \mathbf{F}_{\text{elec}} = k\lambda$$

(F) Relação entre uma corrente elétrica e a força eletromotriz que a produz

$$\text{resistência elétrica: } \mathbf{F}_{\text{elec}} = \sigma^{-1}\mathbf{j} \quad (\text{condutores})$$

(G) Relação entre a quantidade de eletricidade livre em um ponto e o deslocamento elétrico na vizinhança

$$\text{equação da eletricidade livre: } \nabla \cdot \lambda = e$$

(H) Relação entre o crescimento ou diminuição de eletricidade livre e as correntes elétricas na vizinhança

$$\text{equação da continuidade: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

## 7. Um cadáver no armário (a condução)

O trabalho de Maxwell influenciou uma geração, que incluiu George Francis Fitzgerald, Joseph Larmor, Oliver Lodge, Oliver Heaviside, Joseph John Thomson. Fitzgerald e Lodge desenvolveram modelos mecânicos para o éter [12].

A corrente de deslocamento era justificada no modelo, mas não a condução de eletricidade, o  $\mathbf{j}$  [9]. Isso

trouxe um problema [13, p. 453-458], descrito a seguir, como formulado em [9, p. 142-150]. Dielétricos possuem elasticidade do éter, de modo que  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \neq 0$ , porém condutores não têm elasticidade rotacional e  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ . Como entender a propagação de eletricidade em um circuito? Pela lei de Ampère, em torno da secção do fio deveria valer  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ , onde  $I$  é a corrente; mas em condutores  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ; trocando  $\mathbf{H}$  por  $\mathbf{E}$ , como fez Larmor, o leitor moderno reconhece o argumento usado, hoje, para introduzir a corrente de deslocamento. Larmor resolve o problema [13, p. 453-458], [9, p. 142-150], postulando que o éter sofre uma ruptura de elasticidade em volta do condutor, de modo a formar “tubos” de escoamento com elasticidade rotacional, em torno dos quais a circulação é não nula. A solução de Larmor sofre uma crítica de Kelvin [14]: A força entre dois de tais tubos de escoamento tem sinal diferente da força entre dois fios, dada pela lei de Ampère [9, p. 291-293], [13, p. 504-508]. Na procura de uma solução para o problema, Larmor — sempre guiado por FitzGerald — abandonou o modelo e colocou pontos de elasticidade ou centros de rotacional na superfície dos tubos — os elétrons [13, p. 455]. Esse elétron teórico não necessariamente foi considerado como parte integrante da matéria ou do átomo [9, 15]. A história que se segue é longa [15].

## Apêndices

### 1: Cálculo das pressões

Inicialmente, Maxwell supõe vórtices circulares e homogêneos, girando com a mesma velocidade angular, em torno de eixos paralelos [2, p. 456]. A pressão radial, perpendicular ao eixo, é dada pela força centrífuga em uma superfície do éter,  $\delta S$ , perpendicular ao raio do círculo ( $r$ ). A velocidade tangencial não é constante:  $r\omega = v$ ; a pressão na circunferência é

$$\begin{aligned} \text{força centrífuga: } \delta F &= \rho \delta V \frac{v^2}{r} = \rho \delta r \delta S \frac{v^2}{r} \quad (\text{onde } \delta V = \delta r \delta S) \\ \text{pressão na face } \delta S: \delta p_r &= \frac{\delta F}{\delta S} = \rho \delta r \frac{v^2}{r} = \rho \delta r r^2 \frac{\omega^2}{r} = \rho \omega^2 r \delta r \end{aligned}$$

Integrando, acha-se a pressão na circunferência [2, p. 456, fórmula sem número]  $p_r = p'_0 + \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 = p'_0 + \frac{\rho}{2}v^2$ , onde  $p'_0$  é uma pressão no eixo. Maxwell introduz, ainda, uma pressão média no eixo, devida à não uniformidade da velocidade ao longo do raio [2, p. 456, fórmula sem número]  $p_m - p'_0 = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}\rho v^2) = \frac{1}{4}\rho v^2$ , logo  $p_m = p'_0 + \frac{1}{4}\rho v^2$ .

No eixo atuam, pois, a pressão centrífuga e uma pressão média:  $p_r - p_m = \frac{1}{4}\rho v^2$ . Postos lado a lado, os vórtices formam um fluido que exerce a pressão  $p = \frac{1}{4}\rho v^2$ . Se os vórtices não são circulares e se as velocidades angulares e densidades não são uniformes, mas variam igualmente para cada vórtice, o resultado é generalizado:  $p = C\rho v^2$ , onde  $C$  depende da distribuição da velocidade angular e da densidade. Maxwell substitui  $C\rho$  por  $\frac{\mu}{4\pi}$ , de modo que [2, p. 457]:  $p = \frac{\mu}{4\pi} v^2$ .

As componentes da pressão (tensor *stress*) exercida pelo meio, paralelamente aos planos coordenados, parecem ser originadas dos efeitos centrífugos

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi} \mu v_i v_j = p_{ji}.$$

As componentes perpendiculares aos planos, paralelas aos eixos, parecem ser uma generalização; Maxwell inicia o capítulo com uma análise dimensional elementar, mostrando que pressão é proporcional a  $\rho v^2$ , o que legitima a

analogia; então

$$p_{ii} = \frac{1}{4\pi} \mu v_i^2 - p_0, \quad (\text{sem somar em } i)$$

onde  $p_0$  é uma pressão hidrostática isotrópica, introduzida talvez para opor a um achatamento ao longo dos eixos, efeito para o qual Maxwell chama atenção [2, p. 457].

## 2: Cálculo da quantidade de rodas livres transferidas através da unidade de área na direção $\epsilon_i$ na unidade de tempo

Seja  $\hat{\epsilon}_i$  qualquer uma das direções  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . As partículas que cruzam a área normal a  $\hat{\epsilon}_i$  no tempo  $\delta t$  são aquelas contidas no cilindro de volume  $(\mathbf{u}\delta t) \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i$  (sem somar em  $i$ ). Então, se  $\rho$  é a densidade de matéria elétrica

$$\begin{aligned} \text{massa de matéria elétrica através de } dS_i = dS_i \hat{\epsilon}_i \text{ (sem soma em } i) \text{ em } \delta t &= \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i \delta t \quad (\text{sem soma em } i) \\ \frac{\text{massa de matéria elétrica através de } dS_i}{\text{unidade de tempo}} &= \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i \equiv \rho u_i dS_i \quad (\text{sem soma em } i) \end{aligned}$$

$$\frac{\text{massa de matéria elétrica através da superfície separando dois vórtices, movendo na direção } \hat{\epsilon}_i}{\text{unidade de tempo}} = \oint_{\sum S_i} \rho u_i dS_i,$$

onde  $\sum S_i$  indica que a soma é sobre todas as superfícies  $S_i$ . Ora, por definição

$$j_i = \frac{\text{massa de matéria elétrica transferida na direção } \hat{\epsilon}_i}{\text{unidade de área} \times \text{unidade de tempo}}$$

e

$$j_i \times \text{área} = \oint_{\sum S_i} \rho u_i dS_i;$$

notando que  $\rho$  tem unidades de  $\frac{\sigma}{\text{distância}}$ , onde  $\sigma$  é a densidade superficial de matéria elétrica, obtém-se [2, p. 470, fórmula (28)]

$$j_i V = \oint_{\sum S_i} \sigma u_i dS_i.$$

## Cálculo da integral

Substituir  $u_i$  pelo seu valor, (1) acima,  $u_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta$  e expandir em série de Taylor, em torno de  $P$ , onde 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2

$$\Delta v_\beta = (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) [\partial_\gamma v_\beta]_P$$

$$\begin{aligned} \oint_{\sum S_i} u_i dS_i &= \sum_i \oint_{S_i} \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) [\partial_\gamma v_\beta]_P dS_i \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \sum_i \oint_{S_i} n_\alpha (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) dS_i \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \sum_i \int_{V_i} dV_i \partial_\alpha (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \delta_{\alpha\gamma} \sum_i \int dV_i \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \delta_{\alpha\gamma} \sum_i V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\alpha v_\beta]_P V = \frac{1}{2} [(\nabla \times \mathbf{v}) (P)]_{\text{componente } i} V \end{aligned}$$

## 3: Potência transmitida pelas rodas livres

Usando a notação das secções 3.3 e 3.4

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= \mathcal{F}_i(P_0) + d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathcal{F}_i(P_0) = \mathcal{F}_i(P_0) + (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i \\ u_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta \end{aligned}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{F}_{\text{elec}} \cdot \mathbf{u} \, dS &= \oint (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta \, dS = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} \Delta v_\beta \partial_\gamma \mathcal{F}_i \oint (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) n_\alpha \, dS \\ &= -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\gamma \mathcal{F}_i \int dV \partial_\alpha (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) = -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\gamma \mathcal{F}_i \delta_{\alpha\gamma} \\ &= -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\alpha \mathcal{F}_i\end{aligned}$$

#### 4: Variação da velocidade dos vórtices

##### Variação da velocidade por translação infinitesimal da superfície do vórtice

Para deformar ou mover as faces de um cubo infinitesimal do vórtice, um trabalho tem de ser realizado contra as pressões calculadas no Apêndice 1. Então, usando os valores das pressões do Apêndice 1

$$\begin{aligned}\text{trabalho para mover a face } yz \text{ de } \delta x: & \quad \text{força} \times \delta x = [p_{xx} \times \text{área}] \times \delta x = -\frac{\mu}{4\pi} v_x^2 yz \delta x \\ \text{trabalho para mover a face } xz \text{ de } \delta y: & \quad \text{força} \times \delta y = [p_{yy} \times \text{área}] \times \delta y = -\frac{\mu}{4\pi} v_y^2 xz \delta y \\ \text{trabalho para mover a face } xy \text{ de } \delta z: & \quad \text{força} \times \delta z = [p_{zz} \times \text{área}] \times \delta z = -\frac{\mu}{4\pi} v_z^2 xy \delta z\end{aligned}$$

Então [2, p. 479, fórmula (59)]

$$\delta W = p_0 \delta V - \frac{\mu}{4\pi} (v_x^2 yz \delta x + v_y^2 xz \delta y + v_z^2 xy \delta z)$$

Uma partícula na face do cubo tem uma velocidade linear de rotação  $\mathbf{v}$ , de modo que a resistência à deformação resulta em [2, p. 479, fórmula (60)]

$$-\delta T = \frac{\mu}{4\pi} v_i \delta v_i V$$

Conservação da energia

$$\begin{aligned}\delta T &= -\delta W \\ \frac{\mu}{4\pi} [v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z] xyz &= +\frac{\mu}{4\pi} (v_x^2 yz \delta x + v_y^2 xz \delta y + v_z^2 xy \delta z) \\ v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z &= v_x^2 \frac{\delta x}{x} + v_y^2 \frac{\delta y}{y} + v_z^2 \frac{\delta z}{z}\end{aligned}$$

ou [2, p. 480, fórmula (61)]

$$\sum_i v_i \left( \delta v_i - v_i \frac{\delta x_i}{x_i} \right) = 0;$$

como os  $v_i$ 's são independentes, a soma é zero só se [2, p. 480, fórmula (62)]

$$\delta_{\text{trans}} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \frac{\delta x_i}{x_i} \quad \text{para todo } i \quad (\text{sem somar em } i) \quad (7)$$

##### Variação da velocidade por rotação infinitesimal da superfície do vórtice

Por uma rotação infinitesimal que transforma  $\{x, y, z\}$  em  $\{x', y', z'\}$

$$\delta x = +y\theta_3 - z\theta_2 \quad \delta y = -x\theta_3 + z\theta_1 \quad \delta z = +x\theta_2 - y\theta_1$$

ou

$$\delta_{\text{rot}} x_i = -\epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha x_\beta$$

Essa é, também, a lei de transformação de vetores por rotações infinitesimais, de modo que, se a velocidade gira em torno do eixo  $\hat{n}$  [2, p. 480, fórmula (63)]

$$\delta_{\text{rot}} \mathbf{v}_i = -\epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha v_\beta \quad (8)$$

### Transformação de vetores

Sejam  $\xi_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , os elementos da matriz da transformação linear de  $\{x, y, z\}$  em  $\{x', y', z'\}$ .

A transformação direta é  $x'_i = \xi_{i\alpha} x_\alpha$  ou

$$\begin{aligned} x' &= (\hat{i}. \hat{i}') x + (\hat{i}. \hat{j}') y + (\hat{i}. \hat{k}') z \equiv \xi_{11} x + \xi_{12} y + \xi_{13} z \\ y' &= (\hat{j}. \hat{i}') x + (\hat{j}. \hat{j}') y + (\hat{j}. \hat{k}') z \equiv \xi_{21} x + \xi_{22} y + \xi_{23} z \\ z' &= (\hat{k}. \hat{i}') x + (\hat{k}. \hat{j}') y + (\hat{k}. \hat{k}') z \equiv \xi_{31} x + \xi_{32} y + \xi_{33} z \end{aligned}$$

A transformação inversa é  $x_i = x'_\alpha \xi_{\alpha i}$  ou

$$\begin{aligned} x &= (\hat{i}. \hat{i}') x' + (\hat{i}. \hat{j}') y' + (\hat{i}. \hat{k}') z' \equiv \xi_{11} x' + \xi_{21} y' + \xi_{31} z' \\ y &= (\hat{j}. \hat{i}') x' + (\hat{j}. \hat{j}') y' + (\hat{j}. \hat{k}') z' \equiv \xi_{12} x' + \xi_{22} y' + \xi_{32} z' \\ z &= (\hat{k}. \hat{i}') x' + (\hat{k}. \hat{j}') y' + (\hat{k}. \hat{k}') z' \equiv \xi_{13} x' + \xi_{23} y' + \xi_{33} z' \end{aligned}$$

### Caso particular da velocidade

Um vetor é, por definição, uma grandeza que varia de acordo com essas transformações. Portanto, a transformação da velocidade é [2, p. 481, fórmula (65)]

$$v'_i = \xi_{i\alpha} v_\alpha; \quad (9)$$

a transformação inversa é

$$v_i = \xi_{\alpha i} v'_\alpha$$

No caso de rotações infinitesimais, obtém-se a Eq. (8)

$$\delta_{\text{rot}} v_i = -\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha v_j \quad \text{onde a matriz da transformação é: } \xi_{ij}^{\text{rot}} = -\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha \quad (10)$$

No caso das translações infinitesimais

$$\delta_{\text{trans}} v'_i = \xi_{i\alpha} \delta v_\alpha \quad \text{onde, de (7): } \delta v_\alpha = \frac{\delta x_\alpha}{x_\alpha} v_\alpha \quad (\text{sem somar em } \alpha)$$

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \xi_{\alpha i} \delta v'_\alpha \quad \text{onde, de (7): } \delta v'_\alpha = \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v'_\alpha \quad (\text{sem somar em } \alpha)$$

Portanto

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \delta v'_\alpha = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v'_\alpha \quad (11)$$

ou, usando a Eq. (9)

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha\beta} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v_\beta \quad (12)$$

Usando a notação  $\zeta'_\alpha \equiv \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha}$  (o que Maxwell não faz), a matriz da transformação é:

$$\xi_{ij}^{\text{trans}} = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha$$

### Caso particular da posição

As coordenadas também se transformam como nas Eqs. (10) e (12)

$$\delta_{\text{rot}} x_i = +\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha x_j \quad \text{e} \quad \delta_{\text{trans}} x_i = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha x_j \quad (13)$$

### Caso particular do gradiente da posição

Calculando derivadas na Eq. (13):

$$\begin{aligned}\partial_\beta (\delta_{\text{rot}} x_i) &= -\partial_\beta (+\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha x_j) = -\epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha = +\epsilon_{i\beta\alpha} \theta_\alpha \\ \partial_\beta (\delta_{\text{trans}} x_i) &= \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha (\partial_\beta x_j) = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha\beta} \zeta'_\alpha\end{aligned}$$

Somando, obtém-se as 9 componentes do gradiente,  $\partial_\beta (\delta x_i) = \partial_\beta (\delta_{\text{rot}} x_i) + \partial_\beta (\delta_{\text{trans}} x_i)$ , em termos das quantidades independentes [2, p. 480]  $\zeta'_i = \frac{\delta x'_i}{x'_i}$  (translação: 3 quantidades),  $\theta_i$  (rotação: 3 quantidades) e 3 cossenos diretores [2, p. 481, fórmula (64)]

$$\partial_\beta (\delta x_i) = \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha\beta} \zeta'_\alpha + \epsilon_{i\beta\alpha} \theta_\alpha \quad (14)$$

### Transformação geral da velocidade

A deformação mais geral é uma translação da superfície junto com uma rotação. Então:  $\delta \mathbf{v} = \delta_{\text{rot}} \mathbf{v} + \delta_{\text{trans}} \mathbf{v}$ . Portanto, a transformação mais geral de  $v_i$  é,

$$\delta v_i = \xi_{\alpha i} \delta v'_\alpha - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha v_\beta$$

ou, abrindo a expressão [2, p. 481, fórmula (66)]

$$\begin{aligned}\delta v_1 &= \xi_{11} \delta v'_1 + \xi_{21} \delta v'_2 + \xi_{31} \delta v'_3 + v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\ \delta v_2 &= \xi_{12} \delta v'_1 + \xi_{22} \delta v'_2 + \xi_{32} \delta v'_3 - v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\ \delta v_3 &= \xi_{13} \delta v'_1 + \xi_{23} \delta v'_2 + \xi_{33} \delta v'_3 + v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1\end{aligned}$$

Usando a Eq. (7), obtém-se a soma das Eqs. (11) e (8)

$$\delta v_i = \left( \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v'_\alpha \right) - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha v_\beta$$

ou, abrindo a expressão [2, p. 481, fórmula (67)]

$$\begin{aligned}\delta v_1 &= \xi_{11} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} + v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\ \delta v_2 &= \xi_{12} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} - v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\ \delta v_3 &= \xi_{13} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} + v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1\end{aligned}$$

Usando a Eq. (9), obtém-se a soma das Eqs. (12) e (8)

$$\delta v_i = \left( \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} \xi_{\alpha\beta} v_\beta \right) - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha v_\beta$$

ou, abrindo a expressão

$$\begin{aligned}\delta v_1 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{11} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{21} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] + \frac{\delta z'}{z'} \xi_{31} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] \\ &+ v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\ \delta v_2 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{12} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{22} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] + \frac{\delta z'}{z'} \xi_{32} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] \\ &- v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\ \delta v_3 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{13} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{23} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] + \frac{\delta z'}{z'} \xi_{33} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] \\ &+ v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1\end{aligned}$$

Agrupando termos, obtém-se o resultado final

$$\delta v_i = v_\beta \left[ \left( \sum_\alpha \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha\beta} \zeta'_\alpha \right) + \epsilon_{i\beta\alpha} \theta_\alpha \right] \quad (15)$$

ou, abrindo a expressão

$$\begin{aligned}
\delta v_1 &= v_1 \left[ \xi_{11} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} \right] + v_2 \left[ \xi_{11} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_3 \right] \\
&+ v_3 \left[ \xi_{11} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_2 \right] \\
\delta v_2 &= v_1 \left[ \xi_{12} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_3 \right] + v_2 \left[ \xi_{12} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} \right] \\
&+ v_3 \left[ \xi_{12} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} + \theta_1 \right] \\
\delta v_3 &= v_1 \left[ \xi_{13} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} + \theta_2 \right] + v_2 \left[ \xi_{13} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_1 \right] \\
&+ v_3 \left[ \xi_{13} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} \right]
\end{aligned}$$

Falta entender o significado da Eq. (15). Ora, comparando as Eqs. (14) e (15), a Eq. (15) pode ser escrita

$$\delta v_i = (v_\beta \partial_\beta) \delta x_i, \quad \text{ou} \quad \delta v_i = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta x_i.$$

## Referências

- [1] James C. Maxwell, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **10** (1856). Republicado in: W.D. Niven (editor) *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 v. (Cambridge University Press, Cambridge, 1890; reprint, 2010), v. 1, p. 155-229.
- [2] James C. Maxwell, Philosophical Magazine, **21** (1861). Republicado in: W.D. Niven (editor) *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 v. (Cambridge University Press, Cambridge, 1890; reprint, 2010), v. 1, p. 451-490.
- [3] James C. Maxwell, Royal Society Transactions, **45** (1864). Republicado in: W.D. Niven (editor) *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 v. (Cambridge University Press, Cambridge, 1890; reprint, 2010), v. 1, p. 526-597.
- [4] James C. Maxwell, *A Treatise on Electricity & Magnetism*, 2 v., (Clarendon, Oxford, 1873); reprint da terceira edição (1891) (Dover, New York, 1954).
- [5] James C. Maxwell, Philosophical Transactions, **47** (1860). Republicado in: W.D. Niven (editor) *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 v., (Cambridge University Press, Cambridge, 1890; reprint, 2010), v. 1, p. 377-409.
- [6] Edmund Whittaker, *A History of the Theories of Æther and Electricity*, 2 v. (The Philosophical Library, New York, 1951), v. 1.
- [7] James MacCullagh, Transactions of the Royal Irish Academy, **21** (1839). Republicado in: John Jellet e Samuel Haughton (editores) *The Collected Works of James MacCullagh* (Hodges, Figgis & Co, Dublin, 1880; reprint por Nabu Public Domain Reprints).
- [8] Keith R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1967).
- [9] Jed Buchwald, *From Maxwell to Microphysics (Aspects of Eletromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century)* (The University of Chicago Press, Chicago, 1985).
- [10] Michael Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, 3 v., 1839-1855. Republicado in: R. Maynard Hutchins (editor) *Great Books of the Western World*, v. 45. (Encyclopædia Britannica, Chicago, 1952), p. 254-898.
- [11] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John-Wiley, New York, 1962).
- [12] Bruce J. Hunt, *The Maxwellians* (Cornell University Press, Ithaca, 1991).
- [13] Joseph Larmor, Philosophical Transactions of the Royal Society **185**, 719 (1893). Republicado in: J. Larmor (editor) *Mathematical and Physical Papers*, 2 v. (Cambridge University Press, Cambridge, 1929), v. 1, p. 389-536.
- [14] William Thomsom, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1870. Republicado in: Lord Kelvin (editor), *Reprints of Papers on Electrostatic and Magnetism* (Cambridge University Press, Cambridge, 1884; reprint 2011), p. 572-576.
- [15] Isobel Falconer, in: J. Buchwald e A. Warwick (editores) *Histories of the Electron* (The MIT Press, Cambridge, 2001), p. 77-100.